

Farey sequence

Writer: slip0110

Tester: kioa341

問題概要

- 0以上1以下の既約分数の数列が与えられる
- 第 n 項は分母が n 以下の数字である
- 第3項
 - $\{0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1\}$
- ここで指定された n 項目の項数を求める

計算量の確認

- データセットの最大 10000
- 項番号の最大 1000000
- データセットごとに、項数を求めているのはTLE

- F_n はいつでも同じ値になるので
あらかじめ1000000個、列挙できる

アプローチ (1/2)

- 第3項
 - {0/1 , 1/3 , 1/2 , 2/3 , 1/1}
- 第4項
 - {0/1 , 1/4 , 1/3 , 1/2 , 2/3 , 3/4 , 1/1}
- **(第4項の項数) = (第3項の項数) + (第4項の追加項数)**
- 第4項で追加されたのは{1/4 , 3/4}
- 2/4 については、1/2としてすでに追加済み
- 追加されるものは**4と4以下で互いに素の数字**
- 追加される項数は**オイラー関数**を用いて $\phi(4)$

オイラー関数とは？

- 正の整数 n に対して、1から n までの自然数のうち n と互いに素である個数を表す関数
 - $\Phi(n)$
- 1,2,3,4,5,6のうち6と互いに素なのは1と5
→ $\varphi(6) = 2$
- 1,2,3,4,5,6,7のうち7と互いに素なのは7以外
→ $\varphi(7) = 6$
- 構築方法は蟻本のP.243にソースコードがあります
 - 2つ載っていますが、今回はどちらを使ってもTLEにはなりません

アプローチ (2/2)

- (第4項の項数) = (第3項の項数) + $\phi(4)$

$$(第n項の項数) = (第n-1項の項数) + \phi(n)$$

予め $O(\text{MAX_N})$ 程度で構築可能

アリ本P.243 参照

$$(第1項の項数) = 2 \dots \{ 0/1, 1/1 \}$$

- ↑の漸化式を用いて $O(n)$ で予め項数の列挙ができる

ファレイ数列の性質

- 第5項
 - $\{0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1\}$
- 追加される項はその両隣の項の分子同士のと分母同士の和で求められる
 - $2/5 = (1 + 1) / (3 + 2)$
- 隣接する2項を $\{a/b, c/d\}$ とおいたとき $(b * c) - (a * d) = 1$ である

結果

- 正解数：46
- First Accept：ogiekako (20分)